Analisi, Primo Esonero (15-11-2019), Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi. **C**

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +2, risposta non data = 0, risposta sbagliata = −1. Esercizi 4–5: punti 0–6. (Totale= 36. Voto ≤ 17 = Non sufficiente $\mapsto$ Scritto primo appello.)

Esercizio 1 Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona crescente si ha:

1. Se f è illimitata sia superiormente che inferiormente, allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione. V F
2. Se f è continua, allora $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1-\cos(4x)}{\sin(x^2)}\right) < f(5)$. V F
3. Esiste finito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(f(x))}{x^2}$. V F
4. Esiste finito $\lim_{x\to 5^-} (f(x)^3 + f(x^3))$. V F

Esercizio 2 Per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

1. $\{\frac{1}{1+3a_n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata. V F
2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ per $n \to +\infty$. V F
3. $\frac{1}{n}(\sin(a_n)e^{-|a_n|}) \to 0$ per $n \to +\infty$. V F
4. $ne^{-a_n} \to 0$ per $n \to +\infty$. V F

Esercizio 3 Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione.

1. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(a_k)$ converge. V F
2. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge. V F
3. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k^2}$ converge. V F
4. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge. V F

Esercizio 4 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da $a_n := n^2 - 10n + (-1)^n \sin(\frac{n\pi}{8})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

A) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{4\alpha} + \sin^2(n)}$ è convergente.

B) Stabilire, motivando la risposta, se a_n è definitivamente monotona.

C) Determinare se esiste il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Esercizio 5 Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{se } x \leq 1; \\ x + c & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

A) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è continua.

B) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è monotona.

C) Per $c = 1$ determinare $\sup\limits_{[-4,4]} f(x)$ e $\inf\limits_{[-4,4]} f(x)$ e stabilire se essi sono rispettivamente massimi e minimi.